E.N.S.I. M 1979

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

N.B. — *Les quatre parties de ce problème sont* indépendantes.

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ *est l'ensemble des réels,* $\mathbb{R}^+$ *l'ensemble des réels positifs ou nul,* $\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers positifs ou nul,* $\mathbb{N}^*$ *l'ensemble des entiers positifs.*

I

1° Calculer, pour tout $R \in \mathbb{R}^+$, l'intégrale

$$K_R = \int_0^R u\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

ainsi que sa limite lorsque R tend vers l'infini.

2° f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Calculer, pour tout $R \in \mathbb{R}^+$, l'intégrale double :

$$I_R = \iint_{C_R} f(x) f(y)\, dx\, dy$$

où : $$C_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2\}.$$

3° Δ_R désignant le pavé $[-R, R] \times [-R, R]$ et J_R l'intégrale

$$J_R = \iint_{\Delta_R} f(x) f(y)\, dx\, dy$$

vérifier que : $I_R \leqslant J_R \leqslant I_R\sqrt{2}$.

4° Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

est convergente et déduire des résultats précédents qu'elle a pour valeur 1.

5° Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence de l'intégrale généralisée :

$$m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\, dx.$$

Établir une relation de récurrence entre m_n et m_{n-2}. En déduire la valeur de m_n pour tout n.

6° Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'intégrale généralisée

$$m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{tx}\, dx$$

est convergente, et calculer sa valeur $m(t)$.

7° Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \frac{t^k}{k!}.$$

II

Les notations restent celles du § I.

1° A désignant un réel positif donné, et φ_A la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_A(t) = \int_{-A}^{+A} f(x) \cos tx\, dx,$$

démontrer que, quels que soient les réels t_0 et h, on a :

$$|\varphi_A(t_0 + h) - \varphi_A(t_0)| \leqslant 4 \int_0^A f(x) \left|\sin \frac{hx}{2}\right| dx.$$

En déduire la continuité uniforme sur $\mathbb{R}$ de φ_A.

2° Vérifier que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, l'intégrale généralisée

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos tx\, dx$$

.../...

est convergente, et que la fonction $\varphi : t \longmapsto \varphi(t)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

3° t_0 étant un réel donné, déterminer les coefficients α_k et β_k tels que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\cos t_0 x = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \qquad \sin t_0 x = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k.$$

4° $A \in \mathbb{R}^+$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ étant donnés, établir l'existence d'un entier naturel p_0 tel que, quel que soit $x \in [-A, +A]$ la suite de terme général $u_p(x) = |\alpha_{2p} x^{2p}|$ soit décroissante à partir du rang $p = p_0$.

En déduire la limite, lorsque n tend vers l'infini, de l'intégrale :

$$T_n(A) = \int_{-A}^{+A} f(x) \left(\sum_{p=n}^{\infty} \alpha_{2p} x^{2p} \right) dx$$

et en déduire que :

$$\varphi_A(t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_{-A}^{+A} x^k f(x)\, dx.$$

5° Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $A > 0$, et pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ l'intégrale

$$S_n(A) = \int_{A}^{+\infty} f(x) \left(\sum_{p=n}^{\infty} \alpha_{2p} x^{2p} \right) dx$$

vérifie l'inégalité :

$$|S_n(A)| \leqslant \int_{A}^{\infty} f(x)\, e^{|t_0| x}\, dx$$

et en déduire sa limite lorsque A tend vers l'infini.

6° Montrer que, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \frac{(it_0)^k}{k!}.$$

Calculer la somme de cette série et, pour tout $(t, u) \in \mathbb{R}^2$ la valeur de :

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{tx} \cos ux + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{tx} \sin ux\, dx$$

que l'on exprimera en fonction de $z = t + iu$.

III

Dans cette partie, on admettra que, quels que soient les quatre réels a, b, c, d, la fonction

$$x \longmapsto U(x) = \int_a^b u(x, y)\, dy$$

est continue sur $[c, d]$ sous la seule condition que la fonction u le soit sur $[c, d] \times [a, b]$.

1° a, b, c, d étant quatre réels donnés, u étant continue sur $[c, d] \times [a, b]$, α et β étant deux fonctions réelles définies et continues sur $[c, d]$, à valeurs dans $[a, b]$.

Calculer, pour tout $x_0 \in [c, d]$:

$$\lim_{h \to 0} \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} [u(x_0 + h, y) - u(x_0, y)]\, dy$$

montrer alors que la fonction :

$$x \longmapsto V(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} u(x, y)\, dy$$

est continue sur $[c, d]$.

2° On désigne par $\mathcal{F}$ la famille des fonctions réelles g définies sur $\mathbb{R}$, telles que :

a. $\qquad g(x) = 0 \qquad$ pour $x \notin [-A_g, A_g]$

où A_g est un réel positif, pouvant dépendre de g.

b. La restriction de g à $[-A_g, A_g]$ est continue. g et h étant deux éléments de $\mathcal{F}$, déterminer un compact C de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall (x, y) \notin C \qquad g(x)\, h(x - y) = 0.$$

On associe au couple de fonctions (g, h), la fonction, notée $g * h$, définie par :

$$(g * h)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, h(x - y)\, dy \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que : $g * h \in \mathcal{F}$.

3° A toute fonction θ appartenant à $\mathcal{F}$, on associe la fonction de la variable réelle t définie par :

$$\widehat{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\,\theta(x)\,dx.$$

Exprimer $\widehat{g * h}(t)$ en fonction de $\widehat{g}(t)$ et $\widehat{h}(t)$.

4° g_n est la suite de fonctions définie à partir d'un élément $g \in \mathcal{F}$ par :

$$g_1 = g * g\,; \quad \forall\, n > 1, \quad g_n = g_{n-1} * g.$$

Montrer que g_n appartient à $\mathcal{F}$ pour tout n, et déterminer l'expression de $\widehat{g_n}(t)$ en fonction de $\widehat{g}(t)$.

Calculer $\widehat{g}(t)$ puis, pour tout n, $\widehat{g_n}(t)$ dans le cas particulier où :

$$g(t) = \frac{1}{2} \qquad \forall\, t \in [-1, 1]$$

$$g(t) = 0 \qquad \forall\, t \notin [-1, 1]$$

Trouver la limite, lorsque n tend vers l'infini, de $\widehat{g_n}\left(\frac{t\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right)$.

IV

Soit λ un réel strictement positif donné.

On se propose de démontrer l'existence et l'unicité d'une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les conditions C_1 à C_5 ci-après et d'en étudier certaines propriétés.

C_1 : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, v_n est continue en $x = 0$.

C_2 : $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(x) = 1$.

C_3 : $\forall\, (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n(x + y) = \sum_{k=0}^{n} v_k(y)\, v_{n-k}(x)$.

C_4 : $\lim_{x \to 0} \frac{v_1(x)}{x} = \lambda$.

C_5 : si l'on pose : $\psi(x) = \sum_{k=2}^{\infty} v_k(x)$, alors : $\lim_{x \to 0} \frac{\psi(x)}{x} = 0$.

1° En supposant l'existence d'une telle suite, vérifier qu'elle satisfait :

$\forall\, x, v_k(x) \in [0,1]$, $v_1(0) = 0$, $v_k(0) = 0$ pour $k > 1$, $v_0(0) = 1$

$$\forall\, (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \,.\, \forall\, n \geqslant 2, \sum_{k=2}^{n} v_k(y)\, v_{n-k}(x) \leqslant \psi(y).$$

2° Montrer que v_0 est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie une équation différentielle simple de laquelle on déduira que, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$ on a $v_0(x) = e^{-\lambda x}$.

3° Déterminer la solution générale de l'équation différentielle :

(E) $$z' + \lambda z = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Donner la solution particulière de (E) satisfaisant à la condition $z(0) = 0$.

4° De l'étude, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ et pour tout $n \geqslant 1$ de la différence $v_n(x + y) - v_n(x)$, déduire la dérivabilité sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction v_n.

5° En déduire l'existence et l'unicité de la suite de fonctions $\{ v_n \}$ satisfaisant aux conditions C_1 à C_5, et donner la valeur de $v_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

6° Vérifier que, quel que soit $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, la série de terme général $v_n(x)\, e^{tn}$ est convergente et calculer sa somme

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)\, e^{tn}$$

7° On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$l_n(t) = e^{-t\sqrt{n}}\, \varphi\left(\frac{n}{\lambda}, \frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

La suite $(l_n(t))\ n \in \mathbb{N}^*$ est-elle convergente pour tout $t \in \mathbb{R}$?

Dans l'affirmative, donner sa limite.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail